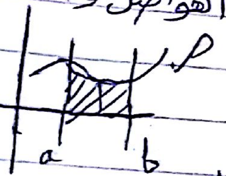
التكامل المحدود وبعض تطبيقاته

خواص التكامل المحدود

1) التكامل المحدود يمثل سطح

ليكن التابع $y = f(x)$ وليكن خطه البياني (c) نعلم من الدراسة الثانوية أن السطح المغلق المحصور بين منحني التابع ومحور الفواصل والمستقيمين



$x = a$, $x = b$

يمثل السطح المغلق هنا التابع الأصلي للتابع المفروض $f(x)$ ورمزنا له $[F(x)]_a^b$

وللتعبير عن السطح المغلق بدلالة التكامل نكتب: $\int_a^b y.dx$

وهذا الرمز يعني (نقصد به) التكامل المحدد وهو يعبر عن الفرق بين قيمتي التابع الأصلي من أجل $x=a$ ، $x=b$

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

2) مبادلة حدي تكامل المحدود:

إذا بادلنا بين حدي التكامل المحدد فإن التكامل يغير إشارته. $y = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a y.dx$$

3) تجزئة المجال

$$\int_a^b y.dx = \int_a^c y.dx + \int_c^b y.dx$$

إذا جزئنا المجال $[a,b]$ إلى عدد من المجالات المتعاقبة فإن قيمة التكامل المحدد لا تتغير

• **ملاحظة هامة:** في التكامل المحدد $\int_a^b y\,dx$ إذا غيرنا المتحول x بمتحول جديد وأجرينا التكامل فليس من الضروري أن نعود بالنتيجة إلى المتحول القديم x ، ويجب أن نغير حدود التكامل a, b ونبدلها بالقيمتين (α, β)

• احسب تكامل:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cos x}$$

$$\tan\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\arctan t \longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

نعوض لإيجاد حدود التكامل:

عندما $x=0$: $\tan\frac{0}{2} = t \Rightarrow t = 0$

عندما $x = \frac{2\pi}{3}$: $\tan\frac{\pi}{3} = t \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+4-4t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{9+t^2}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\arctan\frac{t}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}$$

• **تطبيقات التكامل المحدود:**

1) **حساب المساحة:**

لحساب المساحة المحصورة بين منحني التابع ومحور الفواصل يجب أن نرسم الخط البياني للتابع أولاً.

لأن من المعلوم أن المساحة قد تكون موجبة إذا وقعت فوق محور الفواصل وسالبة إذا وقعت تحت محور الفواصل لهذا نرسم المنحني ونحسب المساحة الموجبة لوحدها ثم نحسب المساحة السالبة ونأخذها بالقيمة المطلقة.

Scanned by CamScanner

نخضعها إلى الزوايا إذا طلب إلينا حساب المساحة الكلية بالإحداثيات الديكارتية:

1) حساب المساحة بالإحداثيات الديكارتية

إذا كانت معادلة التابع من الشكل:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

تكون ... تعطى بالمستوي:

مثال: احسب مساحة الدائرة بالإحداثيات الديكارتية:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y^2 = R^2 - x^2 \longrightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\frac{S}{4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

نفرض:

$$x = \sqrt{R^2}\,.\sin\theta$$

$$\Leftarrow\ dx = R\,.\cos\theta\,.d\theta$$

نبدل حدود التكامل:

$$x = 0 \longrightarrow \theta = 0$$

$$x = R \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{S}{4} = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta}\,.\cos\theta\,.d\theta$$

$$\frac{S}{4} = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\ \cos\theta\,.d\theta$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,.d\theta$$

$$\frac{S}{4} = \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

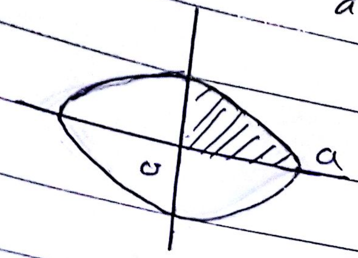
$$\frac{S}{4} = \frac{R^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{S}{4} = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right)$$

$$\frac{S}{4} = \frac{\pi R^2}{4} \longrightarrow \boxed{S = \pi\,.R^2}$$

Scanned by CamScanner

مثال: احسب مساحة القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

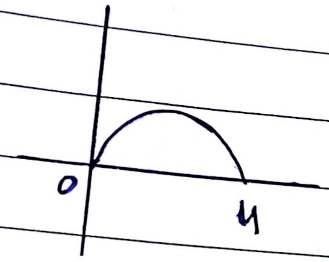
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$S=a\pi b$$

مثال: أوجد المساحة الواقعة فوق محور ox وتحت القطع المكافئ

$$y=4x-x^2$$



نقاط التقاطع مع محور الفواصل

$$4x-x^2=0$$

$$x(4-x)=0$$

إما $x=0$.

أو $x=4$.

$$S=\int_0^4 (4x-x^2)\,dx$$

$$=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$=32-\frac{64}{3}$$

$$=\frac{96-64}{3}=\frac{32}{3}$$

انتهت المحاضرة

Scanned by CamScanner